

Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A de junio, modelo 4 de 2002.

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

(a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de f

(b) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Solución

(a) Asíntotas

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$, luego $y = 1$ es una asíntota horizontal (A.H.) en $+\infty$

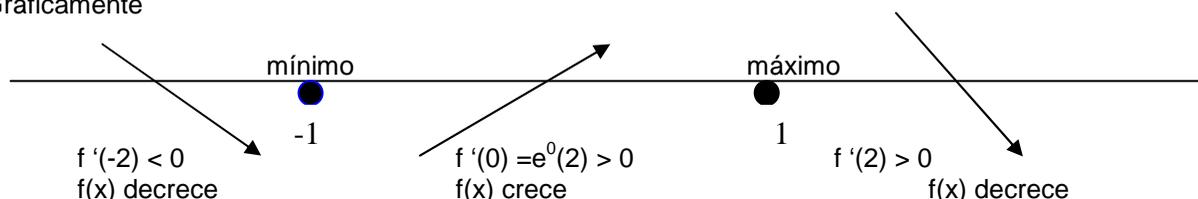
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2x}{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2x}{e^{x^2+1}}} = \frac{1}{e^0} = 1/1 = 1$, luego $y = 1$ es una A.H. en $-\infty$

(b) Monotonía. Estudio de $f'(x)$

$$f'(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left[\frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \right] = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left[\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \right]$$

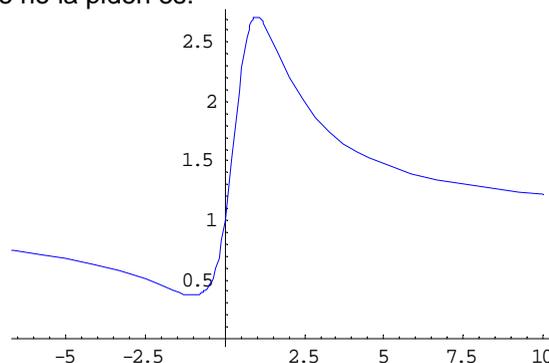
$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2+2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, que serán los posibles máximos o mínimos

Gráficamente



$f(x)$ decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, crece en $(-1, 1)$, tendría un máximo relativo en $x = 1$ con valor $f(1) = e^1 = e$, y un mínimo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = e^{-1} = 1/e$.

La gráfica de la función aunque no la piden es:



Ejercicio 2 de la Opción A de junio, modelo 4 de 2002.

[1'5 puntos] Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0) = P(2) = 1$ y $\int_0^2 P(x) dx = 1/3$.

Solución

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P(0) = 1 = c, \text{ luego } c = 1$$

$$P(2) = 1 = 4a + 2b + 1, \text{ luego } 4a + 2b = 0; \text{ de donde } b = -2a$$

$$\int_0^2 (ax^2 + bx + c) dx = 1/3 = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_0^2 = (8/3)a + 2b + 2c = 1/3$$

Sustituyendo $b = -2a$, tenemos $(8/3)a + 2(-2a) + 2c = 1/3$ y operando obtenemos $a = -5/4$ y $b = 10/4$, luego el polinomio pedido es $P(x) = (-5/4)x^2 + (10/4)x + 1$

Ejercicio 3 de la Opción A de junio, modelo 4 de 2002.

[2'5 puntos] Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que $\text{Det}(A) = -7$

$$y \quad A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución

Como A es una matriz simétrica tiene que ser cuadrada y de la forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$

$$|A| = -7, \text{ es decir } \begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix} = xz - y^2 = -7$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ Operando}$$

$$\begin{pmatrix} 2x-y & 6x-3y \\ 2y-z & 6y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ de donde obtenemos } 2x-y = -4; 2y-z=1; 6x-3y = -12, 6y-3z = 3. \text{ si}$$

observamos de las cuatro ecuaciones dos son iguales por tanto el sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x-y=-4 \\ 2x-z=1 \\ xz-y^2 = -7 \end{cases}$$

De $2x - y = -4$ tenemos $x = (y-4)/2$

De $2y - z = 1$ tenemos $z = 2y - 1$. Entrando con esta x y z en la ecuación $xz - y^2 = -7$ tenemos

$$[(y-4)/2] \cdot (2y-1) - y^2 = -7.$$

Operando se van los términos en y^2 y nos queda $y = 2$, luego $x = (y-4)/2 = -1$ y $z = 2y - 1 = 3$, de donde la

$$\text{matriz pedida es } A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción A de junio, modelo 4 de 2002. -

[2'5 puntos] Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$

con la recta $s \equiv x/3 = y-2 = z+1$ y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+y-4 = 0 \\ 4x-3y+z-1 = 0 \end{cases}$

Solución

$$P = s \cap \pi;$$

$$s \equiv x/3 = y-2 = z+1 \text{ la ponemos en paramétrica } s \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

$$3\lambda + (2+\lambda) - (-1+\lambda) + 6 = 0, \text{ de donde } \lambda = -3 \text{ y tenemos } P(3(-3), 2-3, -1-3) = P(-9, -1, -4)$$

$$\text{El vector director es } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1) - \vec{j}(3) + \vec{k}(-9-4) = (1, -3, -13)$$

$$\text{La recta pedida es } \frac{x-(-9)}{1} = \frac{y-(-1)}{-3} = \frac{z-(-4)}{-13}.$$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B de junio, modelo 4 de 2002.

Sea f la función $f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

(a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de f

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

(c) [0'5 puntos] Con los datos obtenidos esboza la gráfica de f .

Solución

(a) Asíntotas

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{-3}{0^-} = +\infty; \text{ la recta } x = 0 \text{ es una A.V. } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty;$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{15}{0^+} = +\infty; \text{ la recta } x = 2 \text{ es una A.V. } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{15}{0^-} = -\infty;$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x-3}{x^2-2x} = 0; \text{ la recta } y = 0 \text{ es una A.H. en } \pm \infty \text{ de } f(x).$$

(b) Monotonía. Estudio de $f'(x)$

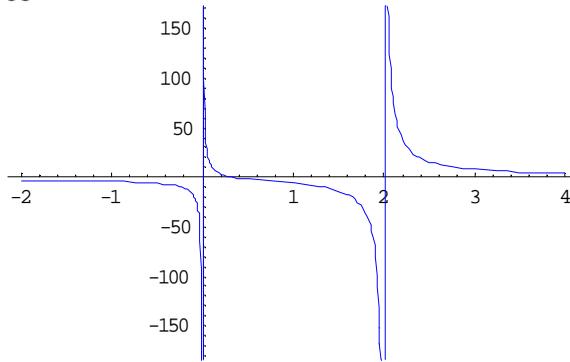
$$f'(x) = \frac{9(x^2 - 2x) - (9x - 3)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-9x^2 + 6x - 6}{(x^2 - 2x)^2}$$

$f'(x) = 0$; $-9x^2 + 6x - 6 = 0$ o bien $3x^2 - 2x + 2 = 0$, de donde $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 24}}{6}$ que no tiene soluciones reales,

por tanto la función siempre es creciente o decreciente para lo cual sustituiremos un n^0 cualquiera en la primera derivada. Si nos da positivo la función es creciente y si nos da negativo la función es decreciente siempre.

Probamos el 1, $f'(1) = -9/1 = -9 < 0$, luego la función siempre es decreciente.

Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio 2 de la Opción B de junio, modelo 4 de 2002.

[2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x \cdot e^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcula su área.

Solución

$$f(x) = x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0, \text{ luego } y = 0 \text{ es una A. H. en } +\infty$$

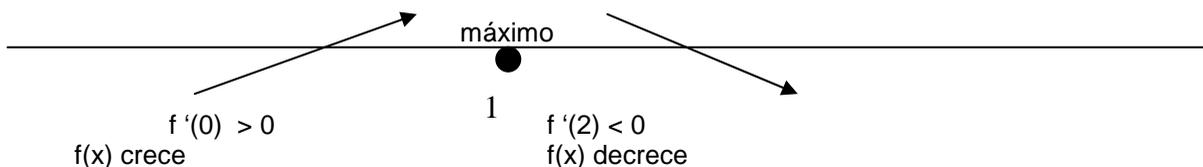
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \cdot e^{-(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \cdot e^x = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

Estudiemos $f'(x)$ para ver su monotonía

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(1 - x)$$

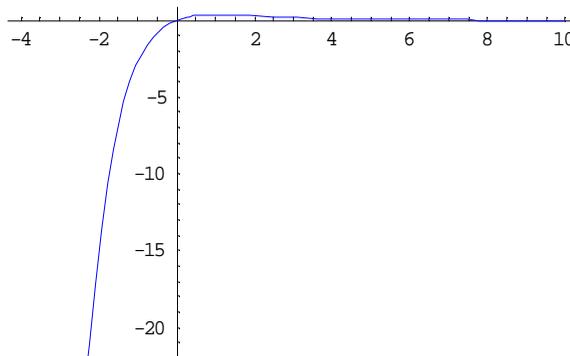
$$f'(x) = 0; 1 - x = 0 \text{ de donde } x = 1 \text{ que será el posible máximo o mínimo}$$

Gráficamente



f crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$ por tanto $x = 1$ es un máximo que vale $f(1) = e^{-1}$.

Su gráfica es



$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 x e^{-x} dx \right| = \left| \left[-e^{-x}(x+1) \right]_{-1}^0 \right| = \left| [(-1)(1)] - (-e(0)) \right| = \left| -1 \right| = 1 \text{ u.a.}$$

$$I = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$u = x; du = dx$$

$$dv = e^{-x}; v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

Ejercicio 3 de la Opción B de junio, modelo 4 de 2002.

[2'5 puntos] Determina una matriz X que verifique la ecuación $AX = X - B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución

$$AX = X - B; AX - X = -B; (A - I) \cdot X = -B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $|A - I| = -1(1) - 0 + 1(-1) = -2 \neq 0$, existe $(A - I)^{-1}$ y por tanto $X = -(A - I)^{-1} \cdot B$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|} \cdot \text{Adj}(A - I)^t$$

$$(A - I)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{Adj}(A - I)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (A - I)^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = -(A - I)^{-1} \cdot B = -\frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B de junio, modelo 4 de 2002.

[2'5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A(1,1,2), B(1,0,-1) y C(1,-3,2)

Solución

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2} \| \overline{AB} \times \overline{AC} \| = (1/2) \cdot \sqrt{12^2} = (1/2) \cdot (12) = 6 \text{ u.a.}$$

$$\overline{AB} = (0, -1, -3); \quad \overline{AC} = (0, -4, 0); \quad \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-12) - \vec{j}(0) + \vec{k}(0) = (-12, 0, 0)$$